

Tema 1. Espazos topolóxicos

Exercicio 0.1 (Imaxes inversas e continuidade). Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación entre conxuntos. Para unha familia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de subconxuntos de Y , proba que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha),$$

e que

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U).$$

1. Espazos topolóxicos

Definición 1.1 (Topoloxía e espazo topolóxico). Sexa X un conxunto. Unha *topoloxía* sobre X é unha familia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

- (I) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- (II) a unión dunha familia arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$;
- (III) a intersección dunha familia finita de elementos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

O par $(X, \mathcal{T})$ denomínase *espazo topolóxico*. Os elementos de X chámanse *puntos* e os elementos de $\mathcal{T}$, *abertos*.

Exercicio 1.2 (Topoloxía usual de $\mathbb{R}$). Considera a familia

$$\mathcal{T}_u = \{U \subseteq \mathbb{R} : \text{para todo } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U\}.$$

Demostra que $\mathcal{T}_u$ é unha topoloxía sobre $\mathbb{R}$, que chamaremos *topoloxía usual* de $\mathbb{R}$. Proba ademais que todo intervalo aberto (a, b) pertence a $\mathcal{T}_u$ e que todo aberto usual de $\mathbb{R}$ é unión de intervalos abertos.

Exercicio 1.3 (Topoloxía usual de $\mathbb{R}^n$). Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, considera a bola euclidiana

$$B_2(x, r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} < r \right\}.$$

Define

$$\mathcal{T}_u = \{U \subseteq \mathbb{R}^n : \text{para todo } x \in U \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_2(x, r) \subseteq U\}.$$

Demostra que $\mathcal{T}_u$ é unha topoloxía sobre $\mathbb{R}^n$, chamada *topoloxía usual* de $\mathbb{R}^n$, e comproba que para $n = 1$ recuperamos a topoloxía do exercicio anterior.

Definición 1.4 (Conxunto pechado). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico. Un subconxunto $F \subseteq X$ dise *pechado* se $X \setminus F$ é aberto.

Proposición 1.5 (Axiomas en termos de pechados). Nun espazo topolóxico $(X, \mathcal{T})$ cúmprese:

- (I) $\emptyset$ e X son pechados;
- (II) a intersección arbitraria de pechados é pechada;
- (III) a unión finita de pechados é pechada.

Reciprocamente, unha familia de subconxuntos que cumpra estas tres propiedades determina unha topoloxía tomando como abertos os seus complementarios.

Exercicio 1.6 (Topoloxías trivial e discreta). Sexa X un conxunto. Considera as familias

$$\mathcal{T}_T = \{\emptyset, X\}, \quad \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X).$$

Demostra que ambas son topoloxías sobre X . Chamaremos a $\mathcal{T}_T$ *topoloxía trivial* e a $\mathcal{T}_D$ *topoloxía discreta*. Comproba ademais que, para calquera topoloxía $\mathcal{T}$ sobre X ,

$$\mathcal{T}_T \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_D.$$

Exercicio 1.7 (Topoloxía cofinita). Sexa X un conxunto e considera a familia

$$\mathcal{T}_{cf} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ é finito}\}.$$

Demostra que $\mathcal{T}_{cf}$ é unha topoloxía sobre X , chamada *topoloxía cofinita*. Comproba tamén que, se X é finito, $\mathcal{T}_{cf}$ coincide coa topoloxía discreta.

Exercicio 1.8. Sexa $X = \{a, b, c\}$. Decide cales das seguintes familias son topoloxías e xustifica a resposta:

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}.$$

Exercicio 1.9 (Espazo de Sierpiński). Sexa $S = \{0, 1\}$ e considera

$$\mathcal{T}_{Si} = \{\emptyset, \{1\}, S\}.$$

- (a) Demostra que $\mathcal{T}_{Si}$ é unha topoloxía sobre S . O espazo $(S, \mathcal{T}_{Si})$ denomínase *espazo de Sierpiński*.
- (b) Determina os subconxuntos pechados de S .
- (c) Compara $\mathcal{T}_{Si}$ coa topoloxía trivial e coa discreta sobre S .

Exercicio 1.10 (Topoloxía do punto particular). Sexa X un conxunto e fixa un punto $p \in X$. Considera

$$\mathcal{T}_p = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : p \in U\}.$$

- (a) Demostra que $\mathcal{T}_p$ é unha topoloxía sobre X , chamada *topoloxía do punto particular* p .
- (b) Determina os subconxuntos pechados.
- (c) Se $|X| \geq 2$, compara $\mathcal{T}_p$ coas topoloxías trivial e discreta.

Exercicio 1.11. Sexa $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ unha familia non baleira de topoloxías sobre o mesmo conxunto X . Demostra que

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$$

é unha topoloxía sobre X .

Exercicio 1.12. Busca todas as topoloxías sobre $X = \{a, b, c\}$ e organiza as relacións de inclusión entre elas.

2. Espazos métricos e topoloxía inducida por unha métrica

Definición 2.1 (Métrica e espazo métrico). Sexa X un conxunto. Unha *métrica* sobre X é unha aplicación

$$d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

tal que, para todos $x, y, z \in X$,

- (I) $d(x, y) = 0$ se, e só se, $x = y$;
- (II) $d(x, y) = d(y, x)$;

$$(III) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

O par (X, d) denomínase *espazo métrico*.

Definición 2.2 (Bola aberta). Sexa (X, d) un espazo métrico, $x \in X$ e $r > 0$. A *bola aberta* de centro x e radio r é

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Definición 2.3 (Topoloxía inducida por unha métrica). Sexa (X, d) un espazo métrico. Un subconxunto $U \subseteq X$ dise *aberto para a métrica d* se para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que

$$B_d(x, r) \subseteq U.$$

Denotamos por $\mathcal{T}_d$ a familia de todos os abertos para d .

Proposición 2.4 (Topoloxía inducida por unha métrica). Sexa (X, d) un espazo métrico. A familia $\mathcal{T}_d$ dos abertos para a métrica d é unha topoloxía sobre X .

Definición 2.5 (Espazo Hausdorff). Un espazo topolóxico $(X, \mathcal{T})$ dise *Hausdorff* se para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen abertos disxuntos $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$ e $y \in V$.

Proposición 2.6 (Os espazos métricos son Hausdorff). Sexa (X, d) un espazo métrico. Entón o espazo topolóxico $(X, \mathcal{T}_d)$ é Hausdorff.

Exercicio 2.7. Demostra que, nun espazo Hausdorff, todo subconxunto formado por un único punto é pechado.

Corolario 2.8. Se X é infinito, a topoloxía cofinita sobre X non pode estar inducida por ningunha métrica.

Exercicio 2.9 (Outros exemplos non metrizables xa coñecidos). Revisa os Exercicios 1.9 e 1.10.

- (a) Demostra que o espazo de Sierpiński non é Hausdorff.
- (b) Se X ten polo menos dous puntos, demostra que a topoloxía do punto particular sobre X non é Hausdorff.
- (c) Deduce que ningunha destas topoloxías pode estar inducida por unha métrica.

Definición 2.10 (Converxencia dunha sucesión). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e sexa $(x_n)_{n \geq 1}$ unha sucesión de puntos de X . Dicimos que (x_n) *converxe* a $x \in X$, e escribimos $x_n \rightarrow x$, se para todo aberto $U \in \mathcal{T}$ que contén x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, entón $x_n \in U$.

Exercicio 2.11 (Unicidade do límite en espazos Hausdorff). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo Hausdorff. Demostra que unha sucesión converxente en X ten un único límite.

Exercicio 2.12 (Unha sucesión con varios límites). No espazo de Sierpiński $(S, \mathcal{T}_{Si})$ do Exercicio 1.9, considera a sucesión constante $x_n = 1$ para todo n . Determina todos os seus límites.

Exercicio 2.13. Sexa (X, d) un espazo métrico e $c > 0$. Proba que $d_c(x, y) = c d(x, y)$ é unha métrica e que $\mathcal{T}_{d_c} = \mathcal{T}_d$.

Exercicio 2.14 (Dúas métricas sobre $\mathbb{R}^n$). Define

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

- (a) Proba que d_∞ é unha métrica.
- (b) Demostra as desigualdades

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x, y).$$

- (c) Deduce que d_2 e d_∞ inducen a mesma topoloxía sobre $\mathbb{R}^n$.

3. Comparación de topoloxías

Definición 3.1 (Topoloxías máis finas e máis grosas). Sexan $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ dúas topoloxías sobre o mesmo conxunto X . Se $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, dicimos que $\mathcal{T}_2$ é *máis fina* ca $\mathcal{T}_1$, ou equivalentemente que $\mathcal{T}_1$ é *máis grossa* ca $\mathcal{T}_2$. Se a inclusión é estrita, dicimos *estritamente máis fina* ou *estritamente máis grossa*.

Exercicio 3.2 (Topoloxía dos raios superiores). Sobre $\mathbb{R}$ considera a familia

$$\mathcal{T}_{\uparrow} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Proba que $\mathcal{T}_{\uparrow}$ é unha topoloxía, que chamaremos *topoloxía dos raios superiores*, e representa nun diagrama as relacións de inclusión entre

$$\mathcal{T}_T, \quad \mathcal{T}_{cf}, \quad \mathcal{T}_{\uparrow}, \quad \mathcal{T}_u, \quad \mathcal{T}_D$$

sobre $\mathbb{R}$. Indica cales das inclusións son estritas e cales das topoloxías non son comparables.

Exercicio 3.3. Demostra que a topoloxía dos raios superiores sobre $\mathbb{R}$ non é Hausdorff e deduce que non pode estar inducida por ningunha métrica.

Exercicio 3.4 (Topoloxía conumerable). Sexa X un conxunto infinito e considera a familia formada por $\emptyset$ e os subconxuntos de X con complementario numerable. Decide se define unha topoloxía sobre X .

4. Veciñanzas

Definición 4.1 (Veciñanza e veciñanza aberta). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $x \in X$. Un subconxunto $V \subseteq X$ dise unha *veciñanza* de x se existe un aberto $U \in \mathcal{T}$ tal que

$$x \in U \subseteq V.$$

Se ademais V é aberto, diremos explicitamente que V é unha *veciñanza aberta* de x .

Denotaremos por $\mathcal{N}(x)$ a familia de todas as veciñanzas de x e por $\mathcal{N}^\circ(x)$ a familia das veciñanzas abertas de x .

Proposición 4.2 (Propiedades das veciñanzas). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $x \in X$.

- (I) $X \in \mathcal{N}(x)$ e $\emptyset \notin \mathcal{N}(x)$.
- (II) Se $V \in \mathcal{N}(x)$ e $V \subseteq W \subseteq X$, entón $W \in \mathcal{N}(x)$.
- (III) A intersección finita de veciñanzas de x é unha veciñanza de x .
- (IV) Toda veciñanza de x contén unha veciñanza aberta de x .

Proposición 4.3 (Caracterización dos abertos mediante veciñanzas). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $A \subseteq X$. Son equivalentes:

- (I) A é aberto;
- (II) A é unha veciñanza de cada un dos seus puntos;
- (III) para todo $x \in A$ existe unha veciñanza aberta U_x tal que $x \in U_x \subseteq A$.

Exercicio 4.4. Describe as veciñanzas dun punto x nas topoloxías trivial e discreta. Se X é infinito coa topoloxía cofinita, caracteriza tamén as veciñanzas de x .

Exercicio 4.5. Sexa (X, d) un espazo métrico. Demostra que $V \subseteq X$ é unha veciñanza de x se, e só se, existe $r > 0$ tal que

$$B_d(x, r) \subseteq V.$$

5. Base dunha topoloxía dada

Definición 5.1 (Base dunha topoloxía dada). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico. Unha familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ dise unha *base da topoloxía* $\mathcal{T}$ se todo aberto de $\mathcal{T}$ é unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposición 5.2 (Criterio puntual para unha base). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Son equivalentes:

- (I) $\mathcal{B}$ é unha base de $\mathcal{T}$;
- (II) para todo $U \in \mathcal{T}$ e todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal $x \in B \subseteq U$.

Exercicio 5.3 (Bases da topoloxía usual de $\mathbb{R}$). Na recta real coa topoloxía usual, considera as familias

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(a, b) : a < b\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}, r > 0\}, \\ \mathcal{B}_3 &= \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}, \\ \mathcal{B}_4 &= \left\{ B\left(q, \frac{1}{n}\right) : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}.\end{aligned}$$

Comproba, usando o criterio puntual, que $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$ son bases da topoloxía usual de $\mathbb{R}$. Proba ademais que $\mathcal{B}_4$ é numerable.

Proposición 5.4 (As bolas forman unha base). Sexa (X, d) un espazo métrico. A familia

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

é unha base da topoloxía $\mathcal{T}_d$.

6. Base de topoloxía e xeración de novas topoloxías

Definición 6.1 (Base de topoloxía). Sexa X un conxunto. Unha familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ dise unha *base de topoloxía sobre X* se cumpre:

- (I) para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
- (II) se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Teorema 6.2 (Topoloxía xerada por unha base). Sexa X un conxunto e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. A familia $\mathcal{B}$ é unha base de topoloxía sobre X se, e só se, a colección

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

—onde a unión da familia baleira se interpreta como $\emptyset$ — é unha topoloxía sobre X da que $\mathcal{B}$ é unha base.

Exercicio 6.3 (Recta de Sorgenfrey e recta dixital). (a) Sobre $\mathbb{R}$, considera a familia

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) : a < b\}.$$

Comproba directamente que $\mathcal{B}_S$ é unha base de topoloxía. A topoloxía xerada denomínase *topoloxía de Sorgenfrey* e denotáremola por $\mathcal{T}_S$; o espazo $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ chámase *recta de Sorgenfrey*.

(b) Para cada $n \in \mathbb{Z}$, define

$$B(n) = \begin{cases} \{n\}, & n \text{ impar}, \\ \{n-1, n, n+1\}, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Comproba directamente que $\mathcal{B}_D = \{B(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ é unha base de topoloxía sobre $\mathbb{Z}$. O espazo topolóxico resultante chámase *recta dixital*.

Exercicio 6.4 (Separación na recta dixital). Demostra que a recta dixital non é Hausdorff e deduce que a súa topoloxía non pode estar inducida por ningunha métrica.

Exercicio 6.5. Proba que

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\}$$

é unha base de topoloxía sobre $\mathbb{R}^2$ e que a topoloxía xerada coincide coa topoloxía usual de $\mathbb{R}^2$.

Exercicio 6.6. Sexa

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{[p, q) : p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}.$$

Proba que $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ é unha base de topoloxía sobre $\mathbb{R}$ e compara a topoloxía xerada con $\mathcal{T}_u$ e $\mathcal{T}_S$.

Exercicio 6.7. Unha progresión aritmética en $\mathbb{Z}$ é un conxunto

$$A_{a,b} = \{a + kb : k \in \mathbb{Z}\}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Demosta que a familia de todas as progresións aritméticas é unha base de topoloxía sobre $\mathbb{Z}$.

Exercicio 6.8. Considera a familia

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\} \cup \{[-1, c) : -1 < c\} \cup \{[1, d) : 1 < d\}.$$

- (a) Demosta que $\mathcal{B}$ é unha base de topoloxía sobre $\mathbb{R}$.
- (b) Compara a topoloxía xerada con $\mathcal{T}_u$.
- (c) Estuda que sucede localmente nos puntos -1 e 1 e explica por que son os puntos especiais da construción.

7. Bases locais

Definición 7.1 (Base local). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $x \in X$. Unha familia $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}(x)$ dise unha *base local en x* se para toda veciñanza $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq V$.

Proposición 7.2. Se para cada $x \in X$ temos unha base local $\mathcal{B}_x$ formada por veciñanzas abertas, entón

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$$

é unha base da topoloxía $\mathcal{T}$.

Proposición 7.3 (Criterio local de comparación de topoloxías). Sexan $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ dúas topoloxías sobre X . Para cada $x \in X$, sexan $\mathcal{B}_x^1$ e $\mathcal{B}_x^2$ bases locais de $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, respectivamente. Entón

$$\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$$

se, e só se, para todo $x \in X$ e todo $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ existe $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$ tal que

$$x \in B_1 \subseteq B_2.$$

Exercicio 7.4. Usa o criterio local para demostrar que

$$\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}_S.$$

Exercicio 7.5. Sexa X un conxunto con dúas métricas d_1, d_2 tales que

$$d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Demosta que

$$\mathcal{T}_{d_1} \subseteq \mathcal{T}_{d_2}.$$

8. Interior, clausura e fronteira

Definición 8.1 (Interior). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $A \subseteq X$. O *interior* de A é

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subseteq A\}.$$

É o maior aberto de X contido en A .

Definición 8.2 (Clausura). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $A \subseteq X$. A *clausura* de A é

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X : A \subseteq F \text{ e } F \text{ é pechado}\}.$$

É o menor pechado de X que contén A .

Definición 8.3 (Fronteira). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico e $A \subseteq X$. A *fronteira* de A é

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

Exercicio 8.4 (Caracterización mediante veciñanzas). Sexa $A \subseteq X$ e $x \in X$. Demostra que:

- (I) $x \in \mathring{A}$ se, e só se, A é unha veciñanza de x ;
- (II) $x \in \overline{A}$ se, e só se, toda veciñanza V de x verifica $V \cap A \neq \emptyset$;
- (III) $x \in \partial A$ se, e só se, toda veciñanza V de x verifica

$$V \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Exercicio 8.5 (Propiedades básicas do interior e da clausura). Para $A, B \subseteq X$, demostra:

- (I) $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$;
- (II) A é aberto se, e só se, $A = \mathring{A}$;
- (III) A é pechado se, e só se, $A = \overline{A}$;
- (IV) se $A \subseteq B$, entón $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ e $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
- (V) $(\mathring{\mathring{A}}) = \mathring{A}$ e $(\overline{\overline{A}}) = \overline{A}$;
- (VI) $(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ e $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercicio 8.6 (Propiedades da fronteira). Demostra que, para todo $A \subseteq X$,

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial(X \setminus A),$$

e que ∂A é pechada. Deduce que A é simultaneamente aberto e pechado se, e só se, $\partial A = \emptyset$.

Exercicio 8.7. En $\mathbb{R}$ coa topoloxía usual, calcula o interior, a clausura e a fronteira de

$$A = [0, 1) \cup \{2\}, \quad B = \mathbb{Q}, \quad C = \{1/n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Exercicio 8.8 (Topoloxía cofinita). Sexa X infinito coa topoloxía cofinita. Determina o interior e a clausura dun subconxunto $A \subseteq X$ distinguindo os casos relevantes segundo que A e $X \setminus A$ sexan finitos ou infinitos. Calcula tamén a súa fronteira.

Exercicio 8.9 (Recta de Sorgenfrey). Na recta de Sorgenfrey:

- (a) proba que $[0, 1)$ é simultaneamente aberto e pechado;
- (b) calcula $(0, 1]$, $(\overline{0, 1})$ e $\partial(0, 1]$.

Exercicio 8.10 (Recta dixital). Na recta dixital calcula

$$\overline{\{3\}}, \quad \{4, \overset{\circ}{5}, 6\}, \quad \partial\{4, 5, 6\}.$$

Exercicio 8.11. Demostra que

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq (A \overset{\circ}{\cup} B), \quad \overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B},$$

e busca exemplos nos que cada unha das inclusións sexa estrita.

9. Un primeiro adianto: compacidade

Definición 9.1 (Recubrimento aberto e compacidade). Sexa $(X, \mathcal{T})$ un espazo topolóxico. Unha familia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de abertos de X é un *recubrimento aberto* de X se

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Un *subrecubrimento* é unha subfamilia que segue recubrindo X . O espazo $(X, \mathcal{T})$ dise *compacto* se todo recubrimento aberto de X admite un subrecubrimento finito.

Exercicio 9.2 (Primeiros exemplos de compacidade). (a) Demostra que todo espazo topolóxico finito é compacto.

(b) Sexa X un conxunto infinito coa topoloxía cofinita. Demostra que $(X, \mathcal{T}_{cf})$ é compacto.

(c) Demostra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ non é compacto construíndo explicitamente un recubrimento aberto que non admita ningún subrecubrimento finito.

Exercicio 9.3. Sexa X un conxunto coa topoloxía discreta. Demostra que X é compacto se, e só se, X é finito.

Exercicio 9.4. Sexan $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ dúas topoloxías sobre o mesmo conxunto X . Decide cal das seguintes implicacións é sempre certa e xustifica a resposta:

(a) se $(X, \mathcal{T}_1)$ é compacto, entón $(X, \mathcal{T}_2)$ é compacto;

(b) se $(X, \mathcal{T}_2)$ é compacto, entón $(X, \mathcal{T}_1)$ é compacto.